SUPPLEMENTA IN EUCLIDEM

SCRIPSIT

GEORGIUS LUDOVICUS KOENIG

Doct. Phil. et Rector

ἐς Τροίην πειρώμενοι ἦνθον Ἀχαιοί.

Sumtibus PERTHES et BESSER.

impressit STRUVE typogr. aulic.

UTINI 1819.

VIRIS ILLUSTRIBUS ET DOCTISSIMIS
PROFESSORIBUS ORDINIS PHILOSOPHICI
IN ACADEMIA KILIENSI

CAROLO LEONARDO REINHOLD Dr.
CONSILIARIO STAT. ET EQUIT. DAN.

AUGUSTO NIEMANN Dr.
CONSILIARIO STAT. ET EQUIT. DAN.

CAROLO FRIDERICO HEINRICH Dr.
NUNC UNIVERSITATIS, QUAE BONNAE FLORERE INCIPIT, ORNAMENTUM.

NICOLAO TEODORO REIMER Dr.

IOANNI ERICO de BERGER Dr.
CONSILIARIO STAT.

IOANNI ADOLPHO NASSER Dr.

BERENDO CORDES Dr.

IOANNI IACOBO PAULO MOLDENHAWER Dr.

IOANNI MATHIAE SCHULZ

FRIDERICO CHRISTOPHORO DAHLMANN Dr.

HOC, QUALECUNQUE EST, GRATI ANIMI

PIGNUS

D. D. D.

AUCTOR.

Ex quo Vos, Viri Illustres et Doctissimi! iudiciis Vestris me nec opinantem publice ornastis, summisque in philosophia honoribus dignum existimastis, equidem non destiti circumspicere, quo gratissimum meum erga Vos animum declararem, palamque omnibus ostenderem, me sedulo id agere, ut Vestrae de me existimationi pro viribus responderem. Ac multa quidem se obtulerunt cogitanti, in quibus disserendis, si non ingenium et doctrinam, studium tamen et diligentiam Vobis et omnibus reipublicae literariae civibus possem probare; verum, vel me tacente, non ignoratis, quantopere otium in vita scholastica sit circumscriptum, quam raro facultas concedatur iuvenilis disciplinae magistris graviora diligentiae suae specimina publice proponendi. Accedit, quod ii, quibus in oppidulis fortunarum sedes collocata est, multa plerumque desiderant praesidia, quae tamen ad manum esse oportet, ut currente rota exire aliquid possit, in quo terendo otii aliquam partem viri docti insumant. Qua in conditione quum ego quoque versarer, contuli me ad eas potissimum disciplinas, quae sine magna librorum copia, mentis potissimum agitatione coluntur, imprimis ad geometriae studium, quod me puerum iam ceperat, saepe deinde per temporum intervalla et intermissum et repetitum, neque a meo munere alienum. Inter omnes enim, qui aliquid hac de re possunt existimare, constat, unum fere esse hoc, quo ingenia iuvenilia et acuantur potissimum et excitentur. Atque in hac iterata eius tractatione ipsa disciplinae forma ita sum delectatus, ut simul aegre ferrem, naevum aliquem superesse, qui splendori eius ac dignitati officeret. Nam artium et doctrinarum, quae quidem a ratione ipsa proficiscuntur, et in quibus illius quasi imaginem tanta cum voluptate contemplamur, amatoribus vix potest accidere, quod Balbinis illis ex Horatio notis, quibus pulchra facies interdum macula ipsa commendatur. Ad hunc naevum detergendum quum iam

per plus quam duo annorum millia viri docti adnisi sint, eorumque studia nunc maxime ad illum nodum solvendum certatim exarserint: ego quoque rem frustra toties tentatam suscipere conatus sum, ut experirer, quid humeri valerent, quid ferre recusarent. Quidnam profecerim, Vestrum sit iudicium, quorum nominibus plagulas hasce inscribere ausus sum, et illorum virorum doctorum, qui eas oculis perlustrare non dedignabuntur.

Ut vero tota ratio, quam ingressus sum, planius perspiciatur, antequam ad rem ipsam venio, pauca, quae non praetermittenda arbitror, praefandi veniam dabitis.

Quando apud geometras de lineis sermo est, eas intelligunt, quas imaginandi vis, quam dicunt productivam, in animo describit, speciem igitur et formam, quae signo tantum, non satis accurato illo quidem, sed tamen idoneo aliis sub oculos potest poni. Mente enim et cogitatione iis, quae, ut sensus feriat, inesse necessario debent, remotis longitudinem solam animo intuemur lineam a geometra descriptam videntes. Linearum autem, ut in vulgus est notum, duo genera sunt, alterum rectarum, curvarum alterum, sed adhuc non convenit inter doctos disciplinarumque mathematicarum peritos a Graecorum aetate ad nostram usque memoriam, quibus tandem notis eum, cuius animum fingas illis formis destitutum, rectum doceas a curvo dignoscere. Tentarunt quidem geometrae, Platonis auctoritatem secuti, definire, qualis tandem esset linea recta, et quid Graeci hac de re excogitaverint, Proclus commentario suo in Euclidis elementa inseruit servatis passim auctorum nominibus. *) Etiam inter recentiores non defuerunt, qui in suis quisque artibus idem sunt conati, sed et eorum studiis eventus non satis videtur respondisse. Na-

*) Plato sic definit rectam interprete Clavio: cuius media obumbrant extrema. Metaphora usus est Plato a solis vel lunae defectu translata. Notissimâ est Euclidis definitio eodem interprete Clavio: quae ex aequo sua interiacet puncta. Hoc ita explicat Proclus: rectam solam idem intervallum obtinere inter sua puncta, quantum enim distet alterum punctorum ab altero, tantam esse magnitudinem rectae ab illis punctis finitae. Quum vero intervallum sub imagine rectae tantum cogitetur, aut recta ipsa sit, hac explicatione facile possumus carere. Disertius in hac re fuit Clavius, dicens, rectam esse, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum vel huc atque illuc deflectendo subsultet, in qua denique nihil flexuosum reperiatur. Nulla fere voce usus est, cuius illustratio a re definita non sit repetenda. Archimedes rectam vocat linearum brevissimam inter eadem puncta. Addit Proclus non sane acute: si enim quaedam esset brevior, non ex aequo interiaceret puncta sua. Aliae definitiones lineae rectae ex Proclo notatae hae sunt: Cuius pars non sit in subiecto plano pars vero in altiori; cuius partes omnes omnibus similiter quadrent; quae manentibus finibus eadem maneat etc.

turam enim et vim recti vel verbis idem significantibus vel iis rebus expresserunt, quae notione tantum recti accuratius evoluta possent intelligi. Quibus ex omnibus, id quod neminem fugit, hoc tantum discimus, rectum non esse curvum, nec curvum rectum. Verum enim vero frustra omnis opera insumta est, nam rectum illud qualitas est simplex, ad prima illa elementa pertinens, quibus utitur imaginandi vis, aliunde impulsa, ad mundos suos construendos et aedificandos; illud omnem definiendi conatum effugit, quia nihil habet in se, praeter id, quod rectum vocamus, et mente tantum videmus, non separatum et collectum e pluribus lineis rectis, sed in mente ipsa ortum et productum, quod aliis quidem et aliis verbis potest enunciari, quibus tamen auditis et accuratius expensis intelligimus, vocum tantum vanitate nos esse delusos neque ulla in re sapientiores redditos. Hoc exemplis illustrare, quae alioquin abunde suppetunt, nec temporis huius est nec loci. Quemadmodum nemo nec fuit nec futurus est tanto ingenii acumine praeditus, qui verbis declaret, qualis sit color vel ruber vel luteus vel caeruleus, ut qui oculorum sensu semper caruerit, eos possit ex descriptione cognoscere: ita nemo, qualis sit linea recta, ulla verborum ambage poterit declarare, ut, si mentem revocamus a forma, quae nobis inest, ex verborum complexu ea nobis innotescat. Demonstrare geometra non potest, esse lineam rectam, postulat tantum, ut sibi hoc concedatur, in quo omnes etiam habet faciles. Quod si, qualis sit linea recta, verbis possis explanare, illud postulatum abibit in problema, hoc est, poterit ostendi, duci posse rectam lineam. *) Leviora quidem haec videntur, quibus tamen minus intellectis quidam in fraudem sunt adducti. Gravius hoc est, sed interdum minus etiam perpensum. Euclides ex illa forma et specie, quatenus animo obversatur,

*) Erit fortasse, qui ita disputet, Euclidem, quid et qualis sit circulus, accurate definito, nihilominus tamen describendi eius facultatem inter postulata retulisse. Factum hoc, et omnes fere eum secuti sunt. Utrum recte an perperam, quaeri saltem potest, nisi auctoritate pugnare velimus. Verum praeter rectam, quae postulatur, quoniam ex definitione non potest agnosci, postulandum quoque erat *planum*, quod concessa recta neutiquam est concessum, nec ex ea potest construi. Hoc *plani* postulatum in illo Euclidis postulato mihi latere videtur; dato enim plano circulum describendi problema et solvi et demonstrari potest. Schulzius (Anfangsgründe der reinen Mathematic pag. 262.) qui idem inter postulata refert, ait in sholio subiuncto: Mechanisch laesst sich die Art dieser Moeglichkeit einsehen, wenn man sich vorstellt, der Radius würde in der Ebene um das Centrum herumgedreht, bis er wieder in seine erste Lage zurückkommt. Verum *mechanisch* id est, quod instrumenti ope fit. Possumus autem animo planum fingere et sola cogitatione rectam circa punctum aliquod convertere nullo instrumento adhibito; id autem, quod cogitatione in animo nostro fieri potest, fit per imaginandi facultatem, constructione legibus eius accommodata, non instrumentorum rationi adstricta, hoc est, non *mechanice*.

numquam quidquam collegit, alioquin (lib. III. Theor. 2.) non opus habuisset demonstrare, rectam per duo puncta, in circuli ambitu sita, scriptam totam cadere intra circulum, contrarium enim cuique, ad imaginem lineae rectae attendenti, absurdum videtur, idque merito. Verum enim vero quae absurda sunt in communi hominum vita, non ita censentur in geometrarum subselliis. In horum consessu illud nomen imponendum huic tantum, quod vel axiomati iusto vel theorematι legitime demonstrato repugnat; in aliis quibuscunque, antequam aut aiant aut negent, faciles et patientes demonstranti praebent aures geometrae, siquidem rem tanti arbitrantur, ita tamen, ut omnis disputatio ex fonte solenni sit deducta, nec vero ex novo aliquo, de cuius puritate adhuc non constet.

Imaginandi illa vis, quam productivam vocant, fons omnium rerum, in quibus geometria versatur, certis legibus est adstricta in fingendo et componendo. Neque satis est in illa arte, notionem aliquam animo informare, in qua nihil sit, quod illi ipsi aut aliis repugnet, sed ostendendum quoque, quomodo versetur illa rerum inventrix in eiusmodi re scribenda, ut non solum forma et imago, in qua omnia insint, quae mente complexus es, ante oculos poni possit, aliique eadem plane videant, quae tibi obversentur, sed etiam facultas eius rei legesque, ex quibus describi potuerit, penitus perspiciantur. Verum et oculorum acies et instrumentorum subtilitas, quae in describendo abhibentur, circumscripta est, habetque suos fines, ultra quos progredi non licet. Constructio autem geometrica, quae mente peragitur, libera est et soluta, nec sensuum imbecillitate coercetur. Omnia vel magna vel parva possunt describi, ad quae describenda finitum aliquod tempus sufficiat. Contra, infinite vel magna vel parva quae vocantur, mente tantum seu cogitatione finguntur, non imaginandi vi formantur, quorum imagines infinito tantum tempore possunt absolvi, hoc est, nullo. Dividendo lineam, ut hoc utar, ad partes pervenire possumus quavis data linea minores; addendis partibus quamlibet parvis ad longitudinem quavis data longitudine maiorem, in neutra vero ratione ad infinite magna aut parva. Constructio solo tempore adstricta phantasiae est propria, saepeque progreditur eo, quo sensus imbecilliores eam sequi nequeunt; delineatio ipsa in oculos incurrens ab oculorum, locorum et instrumentorum ratione est suspensa. Quum vero formas et imagines, quibus geometria utitur, et quae quasi materiam huic doctrinae suppeditant, imaginandi facultas gignat, infiniti autem vis et natura, cuius imago nulla est, e ratione petatur; perperam infinitorum notionem

in geometriam quidam induxerunt elementarem, quae constructione tantum utitur quantisque finitis et terminatis, in quibus solis principium illud congruentiae, e quo reliqua fluunt, vim suam potest obtinere. Quare etiam, siquidem nobis volumus constare, omnis rectarum et curvarum comparatio ex illa eliminanda est, quia curva cum recta nihil habet commune, nisi mera cogitatione fingas, curvam compositam esse ex rectis infinite parvis, quae nulla divisio ullo temporis spatio potest deprehendere. Infinitorum congruentia, quidquid Schulzius, professor olim Regiomontanus celeberrimus et cum de philosophia tum de mathesi meritissimus excogitaverit, quo eam commendaret, ne mente quidem concipi potest, quia res complectendae sunt inter se repugnantes. *) Equidem in hac semper fui opinione, quam nondum deposui, ut statuerem, omnia, quae ad ambitum, aream curvarum et corpora inde nata ad rectam, quadratum et cubum exigenda pertinerent, a geometria sublimiori iure posse vindicari, quippe quae principia adhiberet a ratione petita, et a geometria elementari abhorrentia. **)

Quorsum autem, quae hactenus disputata sunt, pertineant, statim videbitis. Duas rectas in eodem plano positas animo ita concipere possumus, ut in utramque partem productae se non secent, easque describi posse Euclides docuit parallelasque vocavit. Quamdiu non constat, utrum illae rectae, ad Euclidis conditiones ductae, idem semper inter se intervallum servent, an divaricent aut convergant, incertum quoque est, ad unumne inter parallelas punctum illae conditiones pertineant, an ad omnia. Etenim si ponamus, rectas conditionibus accommodate ductas vel divaricare vel convergere, recta per quodcunque aliud punctum ducta et utramque secans

*) Spatia infinita inter rectas infinitas sub eodem angulo se secantes aequalia esse, nullo modo dici possunt. Primum enim rectae infinitae in geometria elementari, quae constructione, non fictione, utitur, nullae sunt, deinde infinita spatia aequalia esse repugnantiam complectitur. Aequalium, quae quidem sunt quoque similia, fines congruunt. Infinita vero sunt finibus destituta, in ea igitur nulla cadit congruentia. Ergo huiusmodi aliquid de illis potest nec affirmari nec negari Hoc quidem dici potest, spatia iisdem arcubus et radiis inclusa esse aequalia. Quamdiu autem de arcu sermo est, tamdiu de spatio loquimur finito. Verum a finito, quantalibet illud sit magnitudine, in infinitum distantia semper est infinita, quam imaginandi vis nullo tempore finito percurrit; nam ubicumque substiterit, infinitum restabit iter emetiendum. Nobis ipsi interdum imponere solemus, negationem finium meram pro ipsa infiniti constructione habentes. Ex hoc errore nata videtur illius viri illustris geometria quantorum infinitorum.

**) Ineptum videtur, circulum in geometriam inductum esse propter instrumenti simplicitatem; quasi doctrinarum fines instrumentorum ratione sint regendi eorumque vel simplici vel multiplici structura.

longe aliam efficiet angulorum rationem. Quae res minus animadversa in causa fuit, quominus intelligeretur, theorema illud Euclideum (Elem. I. 27. & 28.) conversum (I. c. 29) non posse demonstrari, nisi vel tacite vel verbis expressis ponatur, parallelas eandem inter se distantiam servare, seu esse aequidistantes. Etenim quod de uno tantum valet puncto, id ita converti nequit, tamquam valeat de omnibus. Quum vero illae conditiones ubique locum habeant, si sumas, parallelas esse aequidistantes: necesse quoque erat illud assumi ad conversionem theorematis demonstrandam. Atque hoc fecit quoque Euclides axioma suum undecimum in auxilium vocando *), quod verum esse ita tantum potest, si parallelae sunt aequidistantes, illo igitur assumto hoc quoque erat assumtum. Sed quod equidem nondum a viris doctis animadversum legi, in omnibus rectis, quas sumas in eodem plano ita esse ductas, ut in utramvis partem productae se non secent, sive illae aequidistantes sint, sive convergant, sive divaricent, unum alicubi punctum est in medio positum parallelarum intervallo, ad quod illae conditiones spectant, quare recte poterat illud quidem theorema converti, verum, quia ratio latet, qua possis illud punctum invenire, non in universum demonstrari. Convergentibus enim aut divaricantibus parallelis, quum situs illius puncti pendeat a lege, qua convergant aut divaricent, huius autem legis possit esse infinita ratio: per se patet, situm seu locum illius puncti non posse determinari. Aliter se res habet in aequidistantibus, ubi illud pun-

---

*) Klügel V. C. in lexico Math. p. in articulo Parallelen ait, Proclum enunciationem Euclidis undecimam inter postulata referre; immo censet Proclus, eam ex postulatis esse reiiciendam, esse enim theorema multis difficultatibus obseptum, quas Ptolemaeus in quodam volumine solvere sibi proposuerit, in quo demonstrando multis definitionibus et theorematibus opus sit. Notandum quoque, quod ex eodem Proclo liquet, vocem αἴτημα, postulatum, duplicem vim habuisse vel apud geometras, alteram, qua nunc vulgo usurpatur, alteram qua utitur quoque Cicero de Offic. III. 7. 3. *ut geometrae solent non omnia docere, sed postulare, ut quaedam sibi concedantur, quo facilius, quae volunt, explicent.* Hoc vult Cicero, geometram in aliqua re demonstranda uti ante concessis, aut postulare, ut hoc vel illud sibi concedatur, non quia id demonstrari non possit, sed quia demonstratum iam sit, idque, quod demonstrandum sibi sumserit, eo nitatur. Hac ratione utitur, ut tempori parcat, aut ut satietati auditorum occurrat, quorum id tantum scire interest, de quo quaeratur. Haec ratio comprobatur quoque sequentibus ex comparatione instituta Nam honestatem propter se esse expetendam, id quod postulat sibi concedi, probatum iam erat in libris de Finibus. Dilucidius idem expressit Cicero (Tusc. Q. V. 7.) *Nam geometrae, quum aliquid docere volunt, si quid ad rem pertinet eorum, quae ante docuerunt, id sumunt pro concesso et probato; illud modo explicant, de quo ante nihil scriptum est.* Gregorius quoque in suo Euclide notat, se in nonnullis libris scriptis illud axioma inter postulata relatum invenisse. Peius hac voce abutuntur nostri cantores formularum, quas acuminis et eruditionis ostentandae causa ex libris senis illius Regiomontani sunt aucupati, quasque ubique solent inculcare.

ctum, quum a nulla huiusmodi lege pendeat, nusquam non potest esse. Simplicius egerunt duumviri, Posidonius et Geminus, *) dicentes, parallelas esse aequidistantes. Verum haec commoditas, definiendo comparata, cum hoc incommodo erat coniuncta, quod ostendere non poterant, rectas huiusmodi esse posse, nec satis est in hac re ad formam rectae confugere animo impressam, quum id agatur, ut ex natura rectae aliis demonstres, definitionem illam cum notione rectae lineae necessario convenire; id quod, ut supra ostendimus, fieri nequit.

Aliorum quoque tentamina ad Euclidis rationem vel emendandam vel supplendam, sive nova rectae lineae definitio fuerit proposita, sive novum axioma aliquod constitutum, sive de quadam rectarum aequali positione praeceptum, plerumque in recessu habent sumtum illud, parallelas esse aequidistantes, etiamsi verbis utuntur non aperte hoc declarantibus. Ad hoc probandum paucis defungemur exemplis.

Proclus igitur demonstrationem auspicatur hac enunciatione: Si ab uno puncto duae rectae angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedit. Hoc verum est, si parallelae vel aequidistantes sunt vel divaricant, falsum, si convergunt. Demonstrari quidem potest, quemadmodum Clavius fecit, distantiam rectarum augeri, verum ne id quidem potest ostendi, eam vel maxime remotam a vertice duplo maiorem fieri, quam data aliqua, quae propius abest a vertice. Hoc Clavium fugit. Qua enunciatione non contentus Proclus alteram abhibet: Si duarum parallelarum rectarum alteram recta aliqua secat, reliquam quoque productam secabit. Quum hoc autem falsum sit, si ponas, parallelas divaricare: patet illis duobus assumtis sumtum quoque esse, parallelas esse aequidistantes. Clavii ratio hoc nititur: Linea, cuius omnia puncta a recta, quae in eodem plano existit, aequali-

---

*) Posidonii rationem affert Proclus in extremo libro II. commentarii sui in Euclidis elementa: Parallelas esse, quae neque convergant neque divaricent in eodem plano, inter quas omnia perpendicula a punctis alterius ad alteram demissa sint aequalia, inter quas vero decrescant, eas convergere. Perpendiculum enim et altitudinem arearum et intervalla linearum posse finire. Quapropter quum perpendicula aequalia sint, aequalia quoque esse rectarum intervalla, crescentibus vero perpendiculis vel descrentibus etiam intervalla minui et convergere rectas inter se in eam partem, in quam perpendicula minuantur. Hactenus Posidonius. Miror nemini Graecorum in mentem venisse, parallelas quoque posse divaricare et quidem ab ea recta, ad quam ductae sint, in partes contrarias; semper, quantum equidem me legere memini, hoc tantum sumunt, posse eas convergere versus easdem partes. Inde perspicuum est, eos plus tribuisse formae et imagini rectae, quam par erat parallelarum rationem demonstraturis. Forma enim rectae in consilium adhibita omnes tricae, in quibus aliquis possit haerere, sponte evanescunt.

ter distant, recta est. Quod si cum forma rectae lineae mente concepta contuleris, satis probabile videri potest, verum geometrarum morositas in probabilitate non solet acquiescere, omnisque huius rei demonstratio nullum reperiet exitum, nisi hic quoque sumseris, parallelas esse aequidistantes. Eiusdem generis est axioma, quod Robertus Simsonus, clarissimus olim et acutissimus inter Britannos geometra, in Euclide suo anglice verso excogitavit: Nullam rectam a recta aliqua in eodem plano sita, ad quam inclinet, prius divaricare posse, quam eam secuerit, nec, si divaricet, rursus convergere. Habetis eandem cantilenam, aliis tantum verbis expressam, qua concessa concesseritis quoque, parallelas posse nec convergere nec divaricare. Etiam Karstenius, cuius merita de omni re geometrica unusquisque lubenter agnoscit, quum existimat, ex notione positionis duarum rectarum rem posse confici, et ponit: rectas duas eiusdem ad tertiam positionis etiam ad quartam eandem habere positionem, falsus est, si falsum est, parallelas aequidistare. Recentiorum conatuum, qui quidem mihi vel ex scriptis ipsis vel ex ephemer. litt. innotuerunt, eadem fere ratio est, iam principiis, quibus nituntur, habent inclusum, quod inde volunt eruere.

Quae quum ita sint, cardo rerum in eo verti videtur, ut doceas, parallelas esse aequidistantes; quo facto statim potest ostendi, esse posse rectangulum, indeque nullo negotio potest deduci, summam angulorum in quocunque triangulo esse duobus rectis aequalem; hoc autem demonstrato omnis difficultas, quam parallelarum ratio hactenus exhibuit, est discussa. Novam igitur, et, quantum equidem scio, non tentatam adhuc rationem ingrediamur, fortasse non infructuosam, etiamsi votis nostris eventus minus responderit.

Quaeri autem potest, an non absurdum sit, statuere, parallelas vel convergere vel divaricare, quum, quod faciant ad unam partem rectae, ad quam ductae sunt, idem ad alteram partem facere necesse sit, et ex figura seu imagine rectae iam satis adpareat, eam, si ad alteram rectam in eodem plano sitam, ut hoc utar, dextrorsum inclinet, sinistrorsum divaricare debere. De absurdo iam supra vidimus, quale tandem id sit, quod hoc nomine signent geometrae; etiam de imagine rectae et ratione ex ea aliquid colligendi, quae dicenda erant, dicta sunt. Praeterea quoque nemo negabit, aut ponendum esse, parallelas posse vel convergere vel divaricare, aut hoc restare, ut parallelas aequidistantes esse largiamur. Atque, si hoc

a nobis impetraverimus, nihil erit, quod in Euclide magnopere desideremus, praeter quam quod, ut ille theorema suum undetrigesimum adhibito axiomate undecimo demonstrare conatus est, nos ratione inversa et rectius et disciplinae accommodatius axiomatis veritatem ex theoremate ostendamus. Quo facto doctrinae evidentis gloria, quam sibi geometria semper vindicavit, non deflorescet illa quidem, nam qua in parte laxior videbitur eius rigor, phantasia suscipiet patrocinium; semper tamen eius studiosis, qui ipsa disciplinae forma, non dotibus externis, sunt allecti, scrupulus iniicietur, quem magnoqere cupient exemtum, et, quod imaginis contemplatio persuadet, id rationi et intelligentiae numquam probabitur. Quod si contra malumus assensum nostrum argumentis extorqueri, quam persuasionum levitati cedere, nec, quae affirmentur, fieri posse, indicta causa absurditatis damnare, sed examini subiicere diligenti: quamquam inveniamus disquisitionem ipsam multis difficultatibus obseptam et in mari versemur scopulorum plenissimo, ad quos naufragia facta sint plurima, tamen animum non despondeamus, nam, ut utar Sophoclis verbis

— τὸ δὲ ζητούμενον
ἁλωτὸν· ἐκφεύγει δὲ τἀμελούμενον.

Verum quidem est, inquirentibus in naturam parallelarum, et diversarum rationum aliam post aliam excutientibus, quum quasi in conspectu nostro rectae curvarum indolem induant, totque alia portenta et prodigia existant, oculos ipsos rationi fidem negare; cogitandum tamen semper, illa ludibria eiusmodi esse, ut absurditatis non possint accusari, nisi plane axiomati aut theoremati demonstrato repugnent. In hoc negotio difficillimum est, attendere animum, ut nihil admittas, quod vel ipsum, vel per ea, quae inde colligantur, iis contrarium sit, quae posueris, saepeque longa argumentationum serie deducta, quum iam existimes, tandem aliquando aliquid deprehendisse, quod vere absurdum voces, re accuratius inspecta mus ridiculus procurrit ex monte parturiente. Quod omen ut longissime absit ab hac scriptura vehementer equidem cupio. Ipse quoque toties vana spe delusus totam rem iam dudum abiecissem, nisi tempore semper redeunte, quum geometriae elementa a principio essent tradenda, recordatio otii in hanc rem frustra insumti cum indignatione coniuncta studium meum denuo excitasset ad eundem lapidem viribus intermissione renovatis volvendum. Neque tamen, id quod ingenue fateor, eo usque progredi potuissem, si modo aliquatenus progressus sum, nisi adiutus opera viri acutissimi et in hoc quaestionum genere tractando exercitatissimi Hellwagii

Med. Dr. Duci Oldenburgensi a consiliis et Archiatri, quocum communicare licuit ea, quae vera mihi deprehendisse videbar, quique, quum quasi opponentis partes tueretur, saepius me aberrantem in rectam viam reduxit, et, etiamsi totius rationis omniumque theorematum inventio mea est, fecit tamen monendo, ut in argumentorum delectu et cautior essem et religiosior.

Ut tandem argumentandi ratio, quam secutus sum, commodius perspiciatur et perspecta diiudicetur, eam paucis verbis adumbratam oculis Vestris subiiciam. Nulla definitione usus sum, meis quidem rebus accommodata, sed non in re et natura posita; nullum axioma novum induxi, quo res probanda vel casu vel industria iam involuta lateat, cuius auctoritatem nescias an alii sint agnituri; nullam argumentationem adhibui ex forma rectae repetita, quae absurda vocet, quibus apud geometras huiusmodi nomen adhuc non haeserit, sed iis tantum praesidiis instructus, quae Euclides in elementis suis vel invenit vel digessit, rem toties quaesitam veterum severitati convenienter explorare sum conatus. Hoc quoque mihi propositum fuit, ut non probabiliter tantum dissererem, quod parum est quum in omni doctrina, a ratione profecta, tum in nostra disciplina, quae certa tantum et necessaria admittit, sed ut vel maxime invitis assensum extorquerem. Quod si minus consecutus sum, nam errare humanum est, nec geometrae ab hac imbecillitate communi sunt immunes, oleum et operam me perdidisse profitebor, eademque, qua reliquorum, mei quoque conatus oblivione sepeliantur. Parallelarum definitionem adoptavi eam, quam Euclides dedit, quum simul ostenderit, tales posse describi. Quoniam autem in ea definitione nihil insit, quod prohibeat, quominus statuamus, eas vel convergere vel divaricare: quaesivi primum, ut nihil praetermitterem, quod a cultore nostrae disciplinae vel rigidissimo posset desiderari, an fieri posset, ut parallelae versus easdem partes et convergerent et divaricarent. Quod quum docuissem fieri non posse, illam quaestionem institui, num convergerent. Cuius rei inquisitio non diu me torsit, intellexi enim statim, si id ponerem, ex iis, quae inde sequerentur, demonstrari posse, eas non convergere. Investigatio tertia erat maioris momenti longeque difficilior, me quidem per complures annos exercuit. Etenim si semel statuas, parallelas divaricare, nulla causa est, cur neges, eas ita divaricare, ut perpendicula inter illas quavis data tandem magnitudine maiora fiant. Quo in genere etiam hoc rem reddebat perplexiorem, quod ab una parte mens quasi a consuetudine oculorum erat revocanda, ab altera infiniti ludibria evitanda, quibus

mentis acies plerumque praestringi magis solet, quam ad id, quod in re et veritate sit, perspiciendum acui. Quamquam enim parallelae hac ratione videntur fieri arcus circulares, tamen rationi, quae iudex in hac causa sedere debet, ostendi non potest, eas in curvas abiisse, quoniam notae et discrimina, quae habent rectae et curvae, non sufficiunt ad alteras ab alteris distinguendas. Omnis de hac re argumentatio, quam institui, nititur theoremate, quo perhibetur, summam angulorum in quocunque triangulo acutangulo maiorem esse recto. Quare mihi pro se quisque animum adtendat ad id velim, severeque et diligenter id excutiat, nam veritatis mihi maior cura est quam victoriae. Si hoc falsum est, tota disputatio concidit et ad incudem iterum est revocanda. Quum, ut ostendimus, parallelis divaricantibus summa angulorum in quocunque triangulo minor sit duobus rectis, vel terminus debet esse aliquis, infra quem illa summa non descendat, alioquin minor esse possit angulo quovis dato, id quod ridiculum quidem videri, absurdum vero dici non potest, vel iter institutum omnino mutandum aliudque ingrediendum est. Quod si autem hoc comprobatum fuerit, spero et ea vera fore, quae inde sunt deducta. Ad demonstrandum parallelas esse aequidistantes, inquirendum etiam in hoc, quaenam sit illius lineae natura, quae per puncta transeat pari intervallo a recta aliqua distantia et in eodem plano sita positis parallelis divaricantibus. Equidem arbitror, planum esse factum, illam lineam nullam esse posse nisi alteram ex parallelis.

Ex hac brevi disputationis delineatione unusquisque facile potest perspicere, non uno et altero, sed pluribus theorematibus opus fuisse ad rem conficiendam, quamquam non negaverim, brevius et elegantius idem potuisse ostendi ab acutiore et in hoc negotio magis exercitato. Nihil est tamen, quod verear, ne numerus theorematum mihi fraudi sit futurus, nedum suspicionem moturus apud viros doctos, malis avibus totam rem a me esse susceptam.

Habetis, Viri Illustres et Doctissimi! quae praemonenda duxi; quod reliquum est Vos rogo etiam atque etiam, si res ita comparata sit, ut cogat Vos sententias contra me ferre, ne Vestra in me benevolentia, qua me adhuc dignati estis, idcirco minuatur. Valete plurimum mihique et meis studiis, ut facitis, favete,

Scrib. Utini.

SUPPLEMENTA IN EUCLIDEM.

Definitio.

Parallelae rectae lineae sunt, quae quum in eodem sint plano et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt. Euclid. defin. 34. interprete Clavio.

Scholium. Huiusmodi parallelas duci posse ostendit Euclides lib. I. Theor. 18. & 19. Propos. 27. 28.

Theorema I.

Parallelae ad aliquam rectam ductae ad aliam quoque rectam, quae mediam, ad quam ductae sunt, transit, sunt normales. Fig. I.

Demonstratio.

Sint rectae AB, GC ad rectam CB parallelae, ideoque $ABC + GCB = 2R$. Dividatur recta CB in duas partes aequales in puncto F, ab eoque demittantur perpendicula FD et FE ad rectas AB et GC. Iam quum sit $FB = CF$, $DBF = FCE$, $FDB = FEC$, erit triangulum $FDB \cong$ triangulo FCE, indeque $DFB = CFE$. Rectae igitur FD et FE unam rectam efficiunt, ad quam rectae AD et GE sunt normales. Q. e. d.

Corollarium. Quaecunque igitur valent de parallelis AB et GC ad rectam CB ductis, ea valent etiam de rectis AD et GE ad rectam DE normalibus et contra.

Theorema II.

Recta per terminos duorum perpendiculorum aequalium, ad aliquam rectam demissorum et cum ea in eodem plano sitorum, ducta erit illi rectae parallela. Fig. 2.

Demonstratio.

Rectae B A et C D sint perpendicula ad rectam A D et inter se aequales. Rectae B C et A D dividantur in binas partes aequales punctis E et F. Iam vero ductis rectis E F, B F, F C erit triangulum $ABF \cong$ triangulo FCD, inde $BF = FC$ et triangulum $BFE \cong$ triangulo EFC, inde $BEF = FEC = R$. Porro $BFE = EFC$, $AFB = DFC$, indeque $AFE = DFE = R$. Unde apparet, rectam B C rectae A D esse parallelam. Q. e. d.

Corollarium 1. Iisdem positis erit $ABE = DCE$.

Corollarium 2. Perpendicula B A et C D inter parallelas A C et A D a recta E F, ad quam ductae sunt, eodem intervallo $EB = EC$ in utramque partem remota eiusdem sunt magnitudinis, aut $AB = DC$.

Corollarium 3. Rectis B A et C D aequalibus et ad rectam A D normalibus, ductaque recta B C, erit recta E F per puncta E et F, quibus rectae B C et A D in binas partes aequales divisae sunt, ducta, ad utramque, et ad B C et ad A D, normalis.

Scholium. Quod adtinet ad perpendicula inter parallelas ducta, eorum ratio potest esse quadruplex. Etenim 1, vel eo maiora fiunt, quo remotiora sunt a recta, ad quam ductae sunt parallelae, 2, vel eo minora, 3, vel crescunt simul et decrescunt, 4, vel eadem semper manent. Verum ex corollario 2 theorematis praecedentis patet, quodcunque eorum locum habeat, id locum habere ad utramque partem rectae, ad quam parallelae ductae sunt, quandoquidem perpendicula inter parallelas, eodem ab illa recta intervallo demissa, eiusdem sunt magnitudinis.

Theorema III.

In omni quadrangulo rectangulo, si describi potest, latera opposita inter se sunt aequalia. Fig. 3.

Demonstratio.

Sit ABCD quadrangulum rectangulum. Recta CB producta ducatur AE. Non potest esse AD = CE; hoc enim sumto erit (Coroll. I. Theor. II.) DAE = CEA; id quod esse nequit, quum sit per hypothesin DAB = CBA. Ducatur AF. Non magis potest esse AD = FC, nam hoc posito erit (Coroll. I. Theor. II.) DAF = CFA, quod locum habere non potest, quum sit per hypothesin DAB = CBA. Restat igitur, ut sit AD = BC, et pari ratione erit AB = DC, Q. e. d.

Theorema IV.

Concesso quadrangulo rectangulo concessum est quoque, summam angulorum cuiuscunque trianguli esse duobus rectis aequalem. Fig. 4.

Demonstratio.

Si ABCD est quadrangulum rectangulum, erit (Theor. III.) AB = DC et AD = BC. Ducta recta AC erit triangulum ABC ≅ triangulo DAC. Quum autem summa angulorum in quadrangulo rectangulo sit = 4 R, erit summa angulorum in triangulo rectangulo, quod dimidium quadranguli est, = 2 R. Quod si autem summa angulorum in triangulo rectangulo est = 2 R, quum unumquodque triangulum per perpendiculum aliquod in duo triangula rectangula possit dividi, erit summa angulorum in quocunque triangulo = 4 R − 2 R = 2 R, Q. e. d.

Theorema V.

In omni quadrangulo rectangulo, si describi potest, perpendicula omnia sunt aequalia. Fig. 5.

Demonstratio.

Sit ACDB quadrangulum rectangulum, et BF = AE = GD = HC, ducanturque rectae EF, HG; erit (Coroll. I. Theor. II.) AEF = BFE, CHG = DGH. Iam vero potest esse AEF vel < R, vel > R. Sit AEF < R, erit FEH > R. Est autem FEH = EHG = HGF = GFE, et EH = FG, EF

$=$ H G. Erit igitur E H G F quadrangulum obtusangulum; ductaque recta E G erit triangulum E H G $\cong$ triangulo F E G, summaque angulorum in alterutro triangulo $>$ 2 R, contra Theor. V. Idcirco non potest esse A E F $<$ R Quod si ponamus A E F $>$ R, simili ratione sequetur, summam angulorum in alterutro triangulo esse $<$ 2 R, contra Theor. V. Inde colligitur, esse A E F $=$ B F E $=$ R, indeque ex Theor. III. F E $=$ B A $=$ G H. Q. e. d.

Corollarium 1. Si B F $=$ F D, erunt (Coroll. 3. Theor. II.) B A E F et E C D F quadrangula rectangula, et propterea (Theor. III.) A B $=$ E F $=$ C D.

Theorema VI.

Perpendicula inter parallelas in alterutra parte rectae, ad quam ductae sunt, non possunt crescere et rursus decrescere, nec vicissim decrescere et rursus crescere. Fig. 6.

Demonstratio.

Sint rectae A B et D C ad rectam B C normales ideoque inter se parallelae. Ponamus fieri posse, quod in theoremate negatur, erunt alicubi duo perpendicula a recta A B ad rectam D C demissa, A D et F G, inter se aequalia. Segmentis A F et D G in binas aequales partes, punctis E et H, divisis, ductaque recta E H, erit (Coroll. 3. Theor. II.) A E H $=$ D H E $=$ R, et E B C H quadrangulum rectangulum, atque ex Theor. V. F G $=$ E H $=$ B C, E F G $=$ H G F $=$ R, inde quia (Coroll. 2. Theor. II.) est D A F $=$ G F A, erit etiam D A F $=$ R. Propterea quoque A D $=$ E H $=$ F G $=$ B C, omniaque perpendicula inter parallelas A B et D C aequalia. Quod quum sit contra hypothesin, non potest fieri, quod in theoremate negatur. Q. e. d.

Scholium. Quum igitur perpendicula inter duas parallelas, quo longius a recta, ad quam ductae sunt, demittantur, non possunt crescere et rursus decrescere, nec vicissim decrescere et rursus crescere: restat triplex perpendiculorum ratio.

a) Si perpendicula, quo longius a recta, ad quam parallelae ductae sunt, distant, eo magis decrescunt, hoc necesse est fieri ad utramque partem rectae, ad quam ductae sunt, (Schol. ad Theor. II.) dicunturque parallelae convergere.

b) Si perpendicula, quo longius a recta, ad quam parallelae ductae sunt, distant, eo magis crescunt, hoc necesse est fieri ad utramque partem rectae, ad quam ductae sunt, (Schol. ad Theor. II.) dicunturque parallelae divaricare.

c) Si perpendicula quocunque intervallo a recta, ad quam parallelae ductae sunt, distant, eadem manent, parallelae dicuntur aequidistare.

Theorema VII.

Perpendiculum demissum ab una parallelarum ad alteram cum ea, a qua demissum est, vel obtusum angulum facit, si parallelae suut convergentes, vel acutum, si sunt divaricantes, vel rectum, si sunt aequidistantes. Fig. 3.

Demonstratio.

Sint rectae B A, C D ad rectam A D normales; demittatur a quolibet puncto B perpendiculum B C ad rectam D C. Iam

a) Si parallelae sunt convergentes, erit B C < A D. Sit E C = A D; erit (Coroll. I. Theor. II.) C E A = D A E, ergo C B A > B A D.

b) Si parallelae sunt divaricantes, erit B C > A D. Sit F C = A D; erit (Coroll. I. Theor. II.) C F A = D A F, ergo C B A < B A D.

c) Si parallelae sunt aequidistantes, erit B C = A D, ergo (Coroll. I. Theor. II.) C B A = B A D = R. Q. e. d.

Theorema VIII.

Recta duas parallelas secans, neque per mediam rectam, ad quam ductae sunt parallelae, transiens, angulos alternos cum iis facit vel aequales, si parallelae sunt aequidistantes, vel inaequales, si sunt aut convergentes aut divaricantes. Fig. 7.

Demonstratio.

Sint rectae A B, D C ad rectam B C normales. Ductum a quolibet puncto H perpendiculum H G ad rectam D C dividatur iu duas aequales partes puncto I, atque per hoc ducatur recta F K utramque parallelarum secans. Iam

a) Si parallelae sunt convergentes, erit $HG < BC$ et (Theor. VII.) $GHB > R$. Quum igitur $HI = IG$, $HIK = FIG$, $IHK > IGD$: sit triangulum $FGI \cong$ triangulo IHK, $IFG = IKH$ Quia autem $IMG > IFG$, erit quoque $IMG > IKH$. Minoris anguli apex propius abest a recta, ad quam parallelae ductae sunt, maioris anguli apex ab eadem longius abest.

b) Si parallelae sunt divaricantes, erit $HG > BC$ et (Theor. VII.) $GHB < R$. Quum igitur $HI = IG$, $HIK = FIG$, $IHK < IGD$: sit triangulum $IGE \cong$ triangulo IHK, $IEG = IKH$. Quia vero $IEG > IMG$, erit quoque $IMG < IKH$. Maioris anguli apex propius abest a recta ad quam parallelae ductae sunt, minoris longius.

c) Si parallelae sunt aequidistantes, erit $HG = BC$, et (Theor. VII.) $GHB = HBC = R$. Quum igitur $HI = IG$, $HIK = MIG$, $IHK = IGM$, erit triangulum $IHK \cong$ triangulo MIG et $IMG = IKH$. Q. e. d.

C o r o l l a r i u m. Fig. 8. Si sunt HA, IB, KC, GD ad rectam AD normales, ducta recta AG illas rectas secante, erit a) si parallelae ponuntur convergere, $HAE < AEB$, $IEF < AFC$, $KFG < AGD$; inde $AEB < AFC$; $AFC < AGD$. Si ponuntur divaricare, erit $HAE > AEB$, $IEF > AFC$, $KFG > AGD$, inde $AEB > AFC$, $AFC > AGD$. Si ponuntur aequidistare, erit $HAE = AEB$, $IEF = AFC$, $KFG = AGD$; indeque $AEB = AFC$, $AFC = AGD$. Unde facili negotio colligitur, si parallelae vel divaricent vel convergant, nulla omnino esse posse triangula similia, omnemque prorsus figurarum similitudinem inter ea esse referenda, quae locum habere nequeant. Quam ob rem, qui ostendere potuerit, describi posse triangula similia, is simul demonstraverit, parallelas nec convergere posse nec divaricare, ideoque totam rem tot tantisque doctorum disputationibus celebratam expediverit. Verum enim vero, qua ratione id fieri possit, equidem dispicere nequeo. Est quidem huiusmodi, quod mente conceptum habemus, ut nihil insit, quod repugnet, et phantasia prompta videtur esse imaginem huic rei accommodatam suppeditare, nihilominus tamen intelligentiae non est satisfactum, quae postulat, ut ratio reddatur imaginis animo descriptae, unde totius rei facultas appareat, ne imprudens in errorem inducatur.

Theorema IX.

Summa angulorum in quocunque triangulo est vel $> 2R$, si parallelae sunt convergentes, vel $< 2R$, si sunt divaricantes, vel $= 2R$, si sunt aequidistantes. Fig. 9.

Demonstratio.

Sit DBC triangulum, rectangulum habens ad punctum C, et recta AB ita ducta, ut sit $ABC = R$. Iam

a) Si parallelae sunt convergentes, erit (Theor. VIII.) $\alpha < \gamma$, at $\alpha + \beta = R$, ergo $\gamma + \beta > R$.

b) Si parallelae sunt divaricantes, erit (Theor. VIII.) $\alpha > \gamma$; at $\alpha + \beta = R$, ergo $\gamma + \beta < R$.

c) Si parallelae sunt aequidistantes, erit (Theor. VIII.) $\alpha = \gamma$, at $\alpha + \beta = R$, ergo $\gamma + \beta = R$.

Quum vero unumquodque triangulum perpendiculo aliquo in duo triangula rectangula dividi possit, sequitur, in omni triangulo summam angulorum esse vel $> 2R$, si parallelae sunt convergentes, vel $< 2R$, si sunt divaricantes, vel $= 2R$, si sunt aequidistantes. Q. e. d.

Theorema X.

Angulus externus cuiusvis trianguli est vel minor duobus internis oppositis simul sumtis, vel maior, vel aequalis, prout parallelae sunt vel convergentes vel divaricantes vel aequidistantes. Fig. 10.

Demonstratio.

Sit ABC triangulum quodcunque, producaturque latus AC. Iam

a) Si parallelae sunt convergentes, erit (Theor. IX.) $\alpha + \beta + \gamma > 2R$. Sed $\gamma + \delta = 2R$; ergo $\alpha + \beta > \delta$.

b) Si parallelae sunt divaricantes, erit (Theor. IX.) $\alpha+\beta+\gamma<2R$. Sed $\gamma+\delta=2R$, ergo $\alpha+\beta<\delta$.

c) Si parallelae sunt aequidistantes, erit (Theor. IX.) $\alpha+\beta+\gamma=2R$, sed $\gamma+\delta=2.R$, ergo $\alpha+\beta=\delta$. Q. e. d.

Theorema XI.

Si ponamus, parallelas esse convergentes, duae rectae in eodem plano ad aliam rectam ita ductae, ut anguli interni simul sumti parte aliqua, quae designari possit, duobus rectis minores sint, productae se secabunt. Fig. 11.

Demonstratio.

Rectae AE et CF sint ad rectam EF normales. Recta DE faciat cum recta AE angulum AED finitae magnitudinis, eritque $DEF+CFE<2R$. Sit $GF=EF$, ductaque recta GE, sit rursus $HG=GE$. Erit itaque (Theor X.) $EGF<GHE+HEG$, seu $EGF<2HEG$. Est autem (Theor. VIII.) $AEG<EGF$, erit itaque $AEG<2HEG$, seu $\frac{1}{2}AEG<HEG$. Verum angulo in duas partes aequales dividendo, dimidiumque eius iterum sic dividendo et eadem ratione pergendo veniri tandem potest ad partem anguli angulo quovis dato minorem. Hic autem ab angulo plus quam dimidium aufertur, ab illo rursus, quod superest, plus quam dimidium et sic porro. Venire igitur possumus hac ratione ad partem aliquam anguli reliquam quovis dato angulo minorem. Quare constructionem, qua usi sumus, iterum atque iterum repetendo ad punctum tandem in recta FC producta situm perveniemus, per quod et punctum E recta ducta cadet intra crura anguli AED. Quare recta DE producta rectam FC productam secabit. Q. e. d.

Corollarium. Positis parallelis divaricantibus erit vicissim $AEG>EGF$ et $EGF>GHE+GEH$, seu $EGF>2GHE$, seu $GHE<\frac{1}{2}EGF$. Inde est perspicuum, si sic pergamus, posse perveniri ad angulum aliquem GHE quovis dato minorem, seu super rectam quamcunque datam posse triangulum construi aequicrurum, in quo angulus, quem crura efficiant, minor sit angulo quovis dato.

Theorema XII.

Parallelae non possunt esse convergentes. Fig. 12.

Demonstratio I.

Rectae A B et H G, quae sunt ad rectam B G normales, retrorsum producantur. A quolibet puncto E rectae A B retrorsum productae demittatur ad rectam productam H G perpendiculum E F, quo sursum producto, quoniam parallelae ponuntur convergere, erit (Theor. VII. et Schol. ad Theor. VI.) B E F $>$ R, ideoque B E D $<$ R. Quare ex puncto B perpendiculum B D ad rectam F D productam demissum et retrorsum productum cadet infra rectam A B, facietque cum ea angulum A B C, eritque C B G + H G B $<$ 2 R. Patet autem ex Theor. XI. a recta B C producta secari rectam H G productam. Verum quum sit C D F + H F D $=$ 2 R, non poterunt se secare. Quoniam haec sibi repugnant, colligitur, parallelas non posse convergere. Q. e. d.

Demonstratio II. Fig. 12.

Recta F E sursum producta duci potest per punctum B recta aliqua, quae utramque rectam, et H F et F D productam, secet. Sit illa I K. Haec recta circa punctum B se vertens ita, ut intervallum I G crescat, tandem aliquando desinet rectam H F secare, etiamsi eam in infinitum productam fingas. Antequam vero hoc fit, angulus B I G fiet minor angulo quovis dato. Angulus enim ita decrescens continuo decrescit, id est, per omnes gradus minores, qui quidem cogitari possunt, minuitur. Quamdiu autem recta I B rectam productam F H secat, tamdiu erit A B I $<$ B I G (Theor. VIII. b.). Proinde et A B I fiet aliquando minor dato quovis angulo. Quare recta B I, dum circa punctum C se convertit, cadet aliquando intra crura anguli A B C adhuc rectam G H productam secans. Q. e. d.

Scholium. Quum demonstratum sit, parallelas non convergere, in sequentibus ponemus, eas divaricare.

Problema XIII.

Circa datum triangulum aequilaterum ita circulum describere, ut apices angulorum in circuli ambitu sint sitae. Fig. 13.

Solutio.

Sit A B C triangulum aequilaterum datum. Dividantur anguli B A C et B C A in binas partes aequales per rectas A E et C D se secantas in puncto K. Ex hoc puncto radio K A describatur circulus, cuius ambitus per puncta A, B, C ibit.

Demonstratio.

Quoniam anguli B A C et B C A in binas aequales partes per rectas A E et C D sunt divisi, erit E A C = D C A, et A K = C K, B A K = B C K. Quia porro A B = B C, erit quoque triangulum A B K $\cong$ triangulo C B K, indeque A B K = C B K, et angulus uterque = B A K, ideoque B K = A K. Quum itaque sit A K = B K = C K, circuli ambitus ibit per puncta A, B, C. Q. e. d.

Corollarium 1. Rectae A E, B F, C D dividunt latera trianguli A B C in binas partes aequales, itemque ad circuli ambitum productae arcus, quorum chordae sunt illa latera.

Corollarium 2. Quoniam G K B = B K H = H K C cet. ductae rectae G B, B H, H C cet. erunt inter se aequales. Inde apparet, posse describi hexagonum lateribus et angulis aequalibus.

Corollarium 3. Quum H K C = $\frac{2}{3}$ R, erit eius dimidium H K L = $\frac{1}{3}$ R. Quare ab hexagoni aequilateri constructione pendet quoque constructio tertiae partis anguli recti.

Corollarium 4. Circulo ex puncto K radio K α = 2 A K descripto rectisque K B, K A, K C ad circuli ambitum usque productis, ductae chordae $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ novum constituent triangulum aequilaterum, quumque sit K B A > K β α K B C > K $\beta\gamma$ (Theor. VIII. b. Schol. ad Theor. XII.) erit quoque A B C > $\alpha\beta\gamma$. Hinc facile intelligitur, in triangulis aequilateris, quo maiora fiant latera, eo magis angulos decrescere. *)

---

*) In figurarum delineatione locorum angustiae in causa fuerunt, quominus recta K C, quemadmodum contextus iubet, posset produci, propterea etiam deest literula graeca γ, quam tamen facile quilibet cogitatione potest adiicere arcum $\alpha\beta$ usque ad productam K C perducendo.

Theorema XIV.

In nullo triangulo aequilatero, quantacunque sint eius latera, angulus minor esse potest angulo quovis dato. Fig. 13.

Demonstratio.

Omnem angulum, quem rectae faciant, maiorem esse eo, qui a duobus arcubus efficiatur cummuni tangente gaudentibus, notum est (Euclid. lib III. prop. 16.) Per se quoque intelligitur, quicunque angulus in partes possit dividi, quae singulae sint magnitudinis finitae, quarumque numerus sit quovis dato maior, eum non posse esse quovis angulo dato minorem. Cogitemus latera trianguli aequilateri ABC magnitudine esse quavis data maiore, etiam arcus ex verticibus A, B, C radiis AC, AB, BC ducti, qui omnes cadent intra circulum, qui triangulo est circumscriptus, quosvis datos arcus superabunt, et quilibet eorum arcuum dividi potest in partes finitas, quarum numerus sit quovis dato maior. Ductis radiis per puncta divisionis quodlibet radiorum inter se proximorum par includet angulum parvum illum quidem et fortasse quovis dato minorem, sed tamen finitum, quia chorda ex constructione est orta et latera, quamvis magna, finita tamen cogitantur. Unde efficitur, summam illorum angulorum, quorum numerus quovis dato sit maior, angulum non posse constituere quovis dato minorem. Q. e. d.

Scholium. Angulus finitus est, cuius chorda intervallo a vertice finito est finita. Inde etiam angulus quovis dato minor finitus est data eius chorda intervallo a vertice finito. Etenim in angulo quoque, quovis dato minore, latera super chordam datam cogitantur non infinite magna, sed quorum constructio finito aliquo tempore possit absolvi. Neque vero quaelibet linea data in partes dividi potest finitas, quarum numerus sit quovis dato maior, sed ea tantum, cuius magnitudo quoque sit quavis data maior. Divisio quidem ipsa cuiuscumque lineae nullis finibus est circumscripta, sed partes tandem aliquando desinent esse finitae magnitudinis. Alia ratio est arcuum, quorum chordae sunt latera trianguli aequilateri, quae quum quavis data magnitudine facta fuerint maiora, etiam arcus quamvis datam magnitudinem excedent. Verum enim vero, quum probari non possit in geometria elementari, chordam arcu suo esse maiorem, nisi cogitatione fingas, arcum ex lineis rectis, infinite parvis, esse compositum, quas finiti temporis constructio non

potest suppeditare: non me fugit, opponi posse, etiamsi latus quavis data magnitudine sit maius, inde non necessario sequi, ut eius arcus quovis dato maior evaserit. Quare ad vitandas has spinas subiuncta est.

Demonstratio II.

Si ad punctum K in recta B K, quae fingatur in indefinitum producta, erigatur perpendiculum K N, nemo negabit, ad alterum rectae punctum B, etiamsi intervallo quovis dato maiore a priore puncto K distet, sub angulo aliquo finito rectam posse iungi ita, ut perpendiculum, ad punctum K erectum, secet. Supra rectam B K construatur triangulum aequilaterum B K H. In quo si angulus minor ponitur angulo quovis dato, ex huiusmodi triangulis componi potest polygonum, cuius laterum numerus quemvis datum superet. Nam ex eo, quod posuimus, sequitur, angulum B K H quatuor rectos, qui summam constituunt omnium angulorum in eodem plano circa punctum K sitorum, in plures partes divisurum esse, quam quot numerus quivis datus unitates complectatur. (Nihil pertinet ad demonstrationis vim, si neges, ex illis triangulis componi posse polygonum plane aequilaterum, quoniam ex circuli area pars possit superesse minor, quam area trianguli huiusmodi aequilateri.) Sit numerus partium = n, erit igitur polygonum n laterum, quorum n — 2 intra anguli 2. K B H crura cadent, reliquorum alterum erit B H. Quoniam ex hypothesi angulus H K N non multum a recto, angulus K H M non multum a duobus rectis differt, non potest latus B H productum perpendiculum K N secare. Quare si est angulus K B H angulo quovis dato minor, recta aliqua ad punctum B sub angulo, quovis dato minore, iuncta non poterit secare perpendiculum K N. Quod quum sit per se absurdum, consequens est, in nullo triangulo aequilatero, quantacunque sint latera, angulum posse esse dato quovis minorem. Q. e. d.

Theorema XV.

In quocunque angulo perpendiculum a puncto aliquo cruris ad alterum crus demissum maius est quam duplum eius perpendiculi, quod demissum est ab eiusdem cruris puncto cuius ab apice intervallum dimidium est intervalli prioris pe,rpendiculi ab eadem apice.

Demonstratio.

Sit angulus datus B A C et $AF = FB$. Ex punctis F et B demittantur perpendicula F E et B C ad rectam A C. Perpendiculo E F sursum producto, donec sit $FD = FE$, ductaque recta D B erit triangulum $BDF \cong$ triangulo AFE, ideoque $FDB = FEA = R$. Est autem (Theor. VII. b.) $DE < BC$, seu $2.EF < BC$. Q. e. d.

Corollarium 1. Quum unumquodque perpendiculum maius sit quam duplum eius perpendiculi, cuius ab apice distantia dimidium prioris est: sequitur, in quocunque angulo, modo finitae magnitudinis, ad perpendicula posse perveniri quavis data magnitudine maiora.

Corollarium 2. Facto $CAH = CAB$ productisque perpendiculis F E, B C usque ad rectam A H, erit $EG = EF$, $CH = CB$, et $2FG < BH$. Inde colligitur, chordas inter crura cuiusque anguli, si parallelae divaricent, magis crescere, quam dignitates numeri 2.

Corollarium 3. Parallelis positis aequidistantibus erit $AFE = ABC$, $DE = BC$ (Theor. VIII. c.) indeque $2FG = BH$. Apparet igitur, chordas inter crura cuiuscunque anguli, siquidem parallelae sint aequidistantes, crescere ut dignitates numeri 2.

Theorema XVI.

Chordae inter crura cuiuscunque anguli non ita possunt crescere, ut unaquaeque sit triplum eius, cuius intervallum ab apice dimidium est prioris. Fig. 14.

Demonstratio.

Sit angulus datus B A H, $AF = FB = AG = GH$, et $AF = 2FG$. Iam si ponamus esse $BH = 3FG$, hac crescendi lege servata intervallis $2FG$, $2^2.FG$, $2^3.FG \ldots 2^4.FG$ respondebunt ordine chordae FG, $3.FG$, $3^2.FG$, $3^3.FG \ldots 3^{n-1}.FG$. Verum $2^5.FG = 32.FC$, et $3^4.FG = 81.FG$ chorda igitur maior erit, quam radii duplum, id quod absurdum est, quoniam in quocunque triangulo duo-

rum laterum summa maior est tertio. Sit omnino $AF = m.FG$, in serie chordarum, illa lege crescentium, semper una erit $= 3^{n-1}.FG$, maior quam duplum eius intervallum a vertice, id est, maior quam $2.2^n.mFG$, quicunque tandem est numerus m, quum numerus n possit in infinitum crescere. Quare perspicuum est, chordas inter crura cuiuscunque anguli non ita posse crescere, ut unaquaeque sit triplum eius, cuius intervallum ab apice dimidium est prioris. Q. e. d.

Scholium. Est $3^{n-1} = (2+1)^{n-1} = 2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}$ cet. et $2.2^n.m = 2^3.m.2^{n-2}$. sed $2^{n-1} + (n-1).2^{n-2} = 2^{n-2}.(2+n-1) = (n+1).2^{n-2}$, quantuscunque igitur sit numerus m, quum numerus n in infinitum possit crescere, poterit semper fieri $2^3.m < n+1$ seu $n > 2^3.m-1$.

Theorema XVII.

Supra datam rectam triangulum potest construi aequicrurum, cuius alterum crus productum tangentem anguli, duobus illis cruribus inclusi, secet. Fig. 15.

Demonstratio I.

Supra datam rectam BD angulus BCD potest construi quocunque dato minor (Coroll. ad Theor. XI.). Ex puncto C radiis $CD = CB$ et $CE = 2.CD$ ducantur arcus DB et EFG, et supra punctum D erigatur perpendiculum DF, quod erit tangens anguli BCD. Ductis rectis EF et CF erit EFC triangulum aequilaterum, nam $CD = DE$; $DF = DF$; $FDC = FDE$, inde triangulum $FCD \cong$ triangulo FED et propterea $CF = FE = CE$; et quum angulus BCD sit quovis dato minor, angulus autem trianguli aequilateri non possit esse quovis angulo dato minor (Theor. XIV.): crus BC anguli BCD cadet infra latus FC trianguli EFC. Quare crus BC productum secabit tangentem DF. Q. e. d.

Demonstratio II.

Constructione eadem manente sit $DC = m.DB$, erit $EF = 2.DC = 2.m.DB$. Iam vero si ponamus, quod (Theor. XVI.) locum habere nequit, chordam anguli DCB intervallo $EC = 2.DC$ a vertice C esse $= 3.DB$, erit tamen $2.m.DB > 3.DB$, quare crus BC anguli BCD productum secabit tangentem DF. Q. e. d.

Scholium. Caeterum ingenue fateor, quoniam verum tantum quaero, neque inani gloriae servio, theoremata XIV, XVI et XVII totius disputationis esse arcem, qua expugnata reliqua quoque concident. Quare rogo viros doctos, quibus omnino operae videtur esse, quae disserui, examini subiicere, ut illa theoremata potissimum explorent atque excutiant. Etenim si illa impetum oppugnantium sustinuerint, quae sequuntur, nisi egregie fallor, manebunt immota. Sufficere quidem poterat ex theorematibus XIV et XVI alterutrum, verum dum nondum in portu navigamus, satius visum est, duabus ancoris niti. Fortasse etiam doctior aliquis et ingeniosior ex iis, quae disputavi, errore meo monitus verum deprehendere poterit.

Theorema XVIII.

Supra rectam quamcunque potest triangulum construi aequicrurum, in quo angulorum ad basin uterque sit maior dimidio recti. Fig. 16.

Demonstratio.

Sit data recta CB, supra eam describatur triangulum aequicrurum CAB ita, ut sit BA = m.BC, ubi m denotet numerum satis magnum. Ad punctum B erigatur tangens BD, quam crus AC productum secabit (Theor. XVII.), et a puncto C demittatur perpendiculum CF ad tangentem BD. Iam vero tangens ad punctum C arcus BC radio AB ducti non potest cadere in perpendiculum CF, quia DFC = R et propterea non potest esse DCF = R, nam duo anguli in nullo triangulo possunt duos rectos conficere. Multo minus etiam cadere tangens ad punctum C potest intra crura anguli DCF; reliquum igitur est, ut cadat infra CF, quapropter erit FCA > R. Verum FCB < CBA (Theor. VIII. b.) seu FCB < BCA, ergo BCA > ½ R. Q. e. d.

Corollarium. Facile inde potest deduci, summam angulorum in quocunque triangulo acutangulo maiorem esse recto.

Theorema XIX.

Tangentes ad terminos cuiusque quadrantis ductae se secabunt. Fig. 17.

Demonstratio.

Sit angulus ABC rectus, quem in duas partes aequales dividat recta BE, eritque ABE $=\frac{1}{2}$R. Recta autem ex puncto G, quod a puncto B intervallo BG $>$ 2. BC distat, sub angulo BGE $=$ EBG $=\frac{1}{2}$ R ducta secabit rectam BE (Theor. XVIII.). Quare tangens CD, ad terminum quadrantis C ducta, secabit rectam BE in puncto supra punctum E posito. Nam perpendiculum, a puncto E ad rectam BG demissum, cadet infra rectam DC, quia BC $<$ BF, et BG $>$ 2. BC. Sed in eodem puncto D rectam BE tangens AD ad alterum quadrantis punctum secet necesse est, quia triangulum BDC $\stackrel{m}{=}$ triangulo BAD. Tangentes itaque ad terminos cuiuscunque quadrantis se secabunt. Q. e. d.

Theorema XX.

Recta ad terminum quadrantis sub angulo, recti dimidio aequali, aut etiam minori, ducta secabit alterum crus quadrantis productum. Fig. 18.

Demonstratio.

Sit ABC quadrans. Tangentes AE et CE ad terminos eius A et C ductae se secabunt (Theor. XIX.). Sit punctum intersectionis E. Recta BE ducta erit triangulum EAB $\stackrel{m}{=}$ triangulo ECB, ideoque EBA $=$ EBC $=\frac{1}{2}$ R. Est autem (Theor. VII. b.) AE $>$ BC. Sit itaque BD $=$ AE, ductaque recta AD erit triangulum DAB $\stackrel{m}{=}$ triangulo EAB, inde BAD $=$ EBA $=\frac{1}{2}$ R. Quare recta ad terminum alterutrum quadrantis sub angulo $=\frac{1}{2}$ R, seu $<\frac{1}{2}$ R, ducta secabit alterum crus quadrantis productum. Q. e. d.

Scholium. Triangula EAB et EBC aequalia esse et similia nititur eo, quod in alterutra parte perpendiculi a termino eius ad rectam, supra quam erectum est, duae rectae aequales inter se duci nequeunt.

Theorema XXI.

Latus hexagoni aequilateri et aequanguli maius est radio. Fig. 13.

Demonstratio.

Sit HC latus hexagoni aequilateri et aequanguli, punctumque K centrum circuli, in quo illud inscriptum est. Radiis KH et KC ductis erit angulus $HKC = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R$. Quoniam autem summa angulorum in quocunque triangulo $< 2 R$. (Theor. IX. b. et Schol. ad XII.) erit $KHC < \frac{2}{3} R$, quare $HC > KH$. Q. e. d.

Scholium. Positis parallelis aequidistantibus quum summa angulorum in quocunque triangulo sit $= 2 R$ (Theor. IX. c.) erit $HC = KH$.

Theorema XXII.

Latera hexagoni aequilateri et aequanguli iuncta sunt sub angulo, qui maior est recto. Fig. 13.

Demonstratio.

Rectae BH et HC sint duo latera hexagoni aequilateri et aequanguli. A puncto K demittatur perpendiculum KL ad latus HC. Si ponamus $BHC = R$, erit $KHC = KHB = KBH = \frac{1}{2} R$. Quare recta BH producta secabit perpendiculum KL productum (Theor. XX.); fietque triangulum, in quo $MHL = NLH = R$. Quod quum esse nequeat, angulus BHC non potest esse $= R$. Neque magis potest esse $< R$. Erit ergo $> R$. Q. e. d.

Problema XXIII.

Dato intervallo laterum a centro describere hexagonum aequilaterum et aequangulum. Fig. 13.

Solutio.

Datum intervallum sit KL. Ad punctum K adiungatur recta KH sub angulo $HKL = \frac{1}{3} R$ (Coroll. 3. Probl. XIII.), quae recta secabit perpendiculum ad punctum L positum (Theor. XX.). Fiat triangulum $KCL \cong$ triangulo KHL, et ex centro K radio KH describatur circulus, quem recta HC circumlata dividet in sex partes aequales.

Demonstratio.

Quoniam $HKL = \frac{1}{3} R$ per constr. erit $HKC = \frac{2}{3} R = GKA$, rectis HK, CK usque ad circuli ambitum retrorsum productis, et quum $GKH = AKC$, erit

$4R - \frac{8}{3}R = \frac{4}{3}R = GKH$, cuius pars dimidia $BKH = \frac{2}{3}R = HKC$. Quare recta HC circulum dividet circumlata in sex partes aequales. Q. e. d.

Corollarium. Ambitus cuiuscunque circuli per descriptum quodcunque hexagonum aequilaterum in sex partes aequales potest dividi sive maior sit sive minor circulo, in quo hexagonum illud descriptum est. Radii enim KB, KH, KC cet. quemcunque circulum ex centro K descriptum in sex partes aequales divident.

Theorema XXIV.

Rectae ad aliam rectam in eodem plano et pari intervallo normales ductae perpendiculum a summa rectarum ad infimam demissum in partes inaequales ita divident, ut superior quisque maior sit inferiori. Fig. 19.

Demonstratio.

Sint rectae AB, QF, RH, SK, CD ad rectam BD normales, et $BF = FH = HK = KD$. Demittatur ab aliquo puncto A rectae AB perpendiculum AC ad rectam CD. Quoniam $EF < AB$ (Theor. VI. b.): erit $BAE > AEQ$ (Theor. VIII. b.). Verum $AEQ = FEG$, ergo $BAE < FEG$. Pari ratione demonstratur esse $FEG < HGI$, et $HGI < KIC$, inde $AEF > EGH$; $EGH > GIK$; $GIK > ICD$. Sit $FEL = HGM = KIN = DCI = R$, erit $AEL > EGM$; $EGM > GIN$. Quum praeterea sit $EL > GM$; $GM > IN$; $IN > CI$; erit etiam $AE > EG$; $EG > GI$; $GI > IC$. Q. e. d.

Theorema XXV.

Unumquodque perpendiculum inter duas parallelas finito ab illa recta, ad quam ductae sunt, intervallo, minus est duplo spatii, quo puncta distant, ad quae parallelae ductae sunt. F. 20.

Demonstratio.

Sint rectae CA et DB ad rectam AB normales ideoque parallelae, porro sit AB intervallum punctorum, ad quae parallelae ductae sunt, et DB finitum intervallum perpendiculi datum. Ad punctum D sub angulo $= \frac{1}{3}R$ (Coroll. 3. Probl. XIII.) iunge rectam DH, quae secabit perpendiculum BA productum in puncto H. (Theor. XX.) Ex centro D radio DH describatur circulus. Producta deorsum re-

cta B H ad circuli ambitum erit H L latus hexagoni aequilateri et aequanguli. Facto $GH = HL$ ductaque recta G D, erit $GDB = R$. Est autem $GD < HL$ (Theor. XXI.) seu $GD < 2. HB$, et $GHB > R$ (Theor. XXII.). Sit itaque $FHB = R$, eritque $FD < 2. HB$. Recta H B dividatur in partes, quarum quaeque $=$ A B, (nihil refert, si pars quaedam $<$ A B supersit) et ad puncta A, I ducantur perpendicula A C, I E cet. Erit autem partium F E, E C, C D unaquaeque $>$ A B, et $FE > EC$; $EC > CD$ (Theor. XXIV.). Quod si igitur ponamus $CD = 2. AB$ erit quoque $FD > 2. HB$. Verum quum sit $FD < 2. HB$, erit quoque $CD < 2. AB$. Q. e. d.

Scholium. Viri docti, qui hanc demonstrationem legerint, vel sponte intelligent, omnia fere theoremata, quae praecedunt, ad adparatum pertinere, quo opus fuit ad hoc theorema illustrandum et probandum, quodque maxime est necessarium, quum nihil proficere possis, quamdiu ad liquidum non sit perductum, perpendicula ab alterutra rectarum parallelarum ad alteram demissa non posse maiora fieri quavis data magnitudine. Forsan brevior aliqua via, quae eodem ducat, ab aliorum solertia potest inveniri, quam qui ostenderit, et meam et omnium, quibuscumque severum geometriae studium curae cordique est, gratiam inibit. Interim contenti erimus eo, quo voluimus, vel per ambages pervenisse.

Theorema XXVI.

Etiamsi ponamus, parallelas esse divaricantes, duae tamen rectae in eodem plano ad aliam rectam ita ductae, ut anguli interni simul sumti parte aliqua, quae designari possit, duobus rectis sint minores, productae se secabunt. Fig. 21.

Demonstratio.

Sint rectae A B et D C ad rectam B C normales, rectaque E B ita ducta, ut efficiat cum recta A B angulum A B E finitum Cogitentur rectae A B et D C finita quidem magnitudine, sed tamen quavis data maiore. A puncto D demissum sit perpendiculum D A ad rectam A B, illudque erit $< 2. BC$ (Theor. XXV.). Verum recta B E sine fine crescente ad perpendicula, E A, pervenitur quavis data magnitudine maiora (Coroll. I. Theor. XV.). Facile inde colligitur, perpendiculum E A maius aliquando fieri posse, quam perpendiculum D A. Quare necesse est, ut recta B E producta rectam C D productam secet. Q. e. d.

Scholium. Si quis obiiciat, quae demonstrata sint nihil pertinere ad angulos infinite parvos, is hoc responsum ferat: geometrae in elementis nihil commercii esse cum meris fictionibus, quorum nulla sit imago rei conveniens et quae tantum per signa possint exprimi pro arbitrio sumta. Quando de angulis geometra loquitur, eos intelligit, qui construi possint.

Definitio II.

Linea ab aliqua recta aequidistans est, cuius perpendicula omnia ad illam rectam demissa inter se sunt aequalia.

Definitio III.

Curva est ad aliquam rectam concava, si omnes eius chordae intra curvam et rectam cadunt.

Theorema XXVII.

Si parallelae sunt divaricantes, linea aequidistans, si modo esse potest, curva est et concava ad eam rectam, a qua aequidistat. Fig. 22.

Demonstratio.

In punctis A, B, C rectae A C aequali intervallo inter se remotis ad rectam A C erigantur perpendicula A D, B E, C F aequalia. Puncta igitur D, E, F sita erunt in linea a recta A C aequidistanti. Ductis rectis E D et E F, iisque in binas aequales partes per puncta I et K divisis, dividantur pari ratione partes A B et B C rectae A C per puncta G et H. Ductis autem rectis I G et K H, erit D I G $=$ E I G $=$ E K H $=$ F K H $=$ R (Coroll. 3. Theor. II.) et I G $<$ E B, I G $<$ D A; porro K H $<$ E B, K H $<$ F C. Puncta igitur J et K infra lineam aequidistantem erunt sita. Erit quoque A D I $<$ R, et B E I $<$ R (Theor. VII. b.) sed A D I $=$ B E I (Coroll. I. Theor. II.). Eadem ratione B E K $<$ R, C F K $<$ R, sed B E K $=$ C F K. Ducatur recta M N ad punctum E normalis. A quolibet puncto P eius rectae demittatur perpendiculum P Q ad rectem A C, eritque P Q $>$ E B. (Theor. VI. b.) Omnia igitur puncta rectae M N, praeter unum E, supra lineam aequidistantem sunt sita. Quare curva erit haec linea. Quum porro sit A B $=$ B C, recta per puncta D, F ducta erit normalis ad B E (Coroll. 3. Theor. II.). Quumque sit B E I $<$

R, secabit illa recta, per puncta D et F ducta, rectam BE in puncto R infra punctum E sito. Quapropter MN tangens erit curvae, rectae autem DRF, DIE, EKF erunt eius chordae. Unde sequitur, lineam illam aequidistantem et esse curvam, et ad rectam AC, a qua aequidistat, concavam. Q. e. d.

Scholium. Posui equidem, puncta illa aequidistantia sita esse in linea quadam; verum si ad vivum rem resecare volumus, positis parallelis divaricantibus omnia puncta, a recta aliqua in eodem plano aequidistantia, nullam lineam possunt efficere, sed semper dissita et discreta manent, quin, quamvis propinqua etiam perpendicula fingas, tamen iis crescentibus intervalla quoque punctorum crescunt. Alia ratio est circuli, ubi alterum radii punctum motu continuo lineam describit. Hinc iudicatu est facile, quid existimandum sit de iis, qui quasi suo iure posuerunt, illa puncta aequidistantia vel sita esse in recta, vel rectam aliquam efficere, et qui hoc demonstrare sunt conati, ut Italus Vitale Giordano da Bitonto in Euclide suo restituto Romae 1680. et Fr. Gottl. Hanke in dissert. Lipz. 1751.

Theorema XXVIII.

Parallelae sunt aequidistantes. Fig. 23.

Demonstratio.

Sint rectae AB et GC ad rectam BC normales ideoque parallelae, lineaque BFD a recta GC aequidistans. In hac alicubi punctum F ita sumi potest, ut recta BE per puncta B et F ducta cum recta AB efficiat angulum ABD finitum. Nam si eiusmodi punctum in linea aequidistanti nusquam esset, non esset ea disiuncta a recta AB, sed eadem. Iam vero illa recta BE a puncto F versus punctum D semper erit supra lineam aequidistantem, productaque rectam CG productam tandem aliquando secabit (Theor. XXVI.), quam secare numquam potest aequidistans. Quod quum absurdum sit, necesse est, ut linea aequidistans cum recta AB coalescat, seu ut parallelae sint aequidistantes. Q. e. d.

Corollarium. Valent itaque, quae in theorematibus VII, VIII, IX et X tertio loco sunt posita.

Pag. 20. linea 6. ab imo, post *productam secans*, addas: Quare et CD producta secabit HF, et CDF non potest esse $=$ R. Ergo parallelae non possunt convergere.
